Lösungen zur zweiten Klausur

Es handelt sich nicht
um eine Musterlösung
- für volle Punktzahl
  müssen fehlende (Rechen-)
  schritte ergänzt werden!

Aufgabe 1

Wir bringen die erweiterte Matrix auf Zeilennormalform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & -23 & -9 & -6 \\ 4 & 8 & 28 & 15 & 6 \\ 5 & 10 & 32 & 6 & 5 \\ -1 & -2 & -16 & -6 & -6 \end{array}\right)$$

pro Rechenfehler: − 1P
pro unerlaubte Umformung: − 2P

$$\xrightarrow[\substack{\text{III.}+5\cdot\text{IV.} \\ \text{IV.}\cdot(-1)}]{\substack{\text{I.}-2\cdot\text{IV.} \\ \text{II.}+4\cdot\text{IV.}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 9 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -36 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & -48 & -24 & -25 \\ 1 & 2 & 16 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 16 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \frac{25}{24} \end{array}\right)$$

1P

$$\xrightarrow[\text{III.}-2\cdot\text{IV.}]{\substack{\text{I.}-8\cdot\text{IV.} \\ 2\cdot\text{II.}-3\cdot\text{IV.}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \frac{25}{24} \end{array}\right)$$

Aus Zeilen II. und III. sehen wir, dass das inhomogene System keine Lösung hat.

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich ergibt sich

2P

$$L_h = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

als Lösungsmenge des homogenen LGS.

Aufgabe 2

3P (a)
$$\chi_f(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 6 & -\lambda & 3 \\ 0 & 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} \overset{S_{III}-S_{II}}{=} \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 6 & -\lambda & 3+\lambda \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z_{II}+Z_{III}}{=} \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 6 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 6 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-1) = -(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

[oder in ausmultiplizierter Form $\chi_f(\lambda) = -\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+3$]

1,5P (b) Die Eigenwerte in $\mathbb{F}_7$ sind $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$.

4,5P (c)
$$E_f(2) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_f(3) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_f(4) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1P (d) f ist diagonalisierbar, da alle drei Eigenwerte paarweise verschieden sind.

Aufgabe 3

(a) 3,5P

B' ist Basis von $U = \mathbb{R}^3$, da es die Standardbasis ist. (0,5)

B ist Basis von $U = \mathbb{R}^3$: Es genügt, B durch Zeilentransformationen auf Einheitsmatrix zu reduzieren. Hierbei invertieren wir B sofort:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist B linear unabh., also eine Basis. (1)

C ist Basis von V: ~~Zen~~ zeigen ist, dass C lin. unabh. ist und V aufspannt.

- C ist lin. unabh.: Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit
$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

- $\langle C \rangle = V$: "$\subseteq$": $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$, da $2 = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1$.
$\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in V$, da $4 = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1$.

Da V ein UVR von $\mathbb{R}^3$ ist, folgt $\langle C \rangle \subseteq V$.

"$\supseteq$": Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt $x = 4y + 2z$,

also $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \in \langle C \rangle$$ (1)

C' ist Basis von V: [Dies kann analog zum vorherigen Fall gezeigt werden.] (1)

[...]

Aufgabe 3 (Fortsetzung)

(b) Es gilt

6,5P

$$ {}_{C'}M_{B'}(f) = L_{C'} \cdot C \cdot {}_{C}M_{B}(f) \cdot L_B \cdot B', \qquad (*) $$ ← (0,5)

wobei B, B', C, C' als Matrizen aufgefasst werden und L_B, $L_{C'}$ Linksinverse von B, C' sind.

Mit dem üblichen Verfahren können L_B, $L_{C'}$ berechnet werden:

(3) L_B : siehe (a) (L_B ist eindeutig!)

(2) $L_{C'} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (zum Beispiel; $L_{C'}$ ist nicht eindeutig!)

Damit erhält man nach (*)

$$ {}_{C'}M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} $$

+ (1,5)

Aufgabe 4

Kreuzen Sie in den folgenden acht Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind. Pro Aufgabenteil können mehrere Aussagen richtig sein.

Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.

---

(1) Für eine Abbildung $f\colon M \to N$ und Teilmengen $A, B \subset N$ gilt stets:

☒ $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

☒ $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

☐ $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(2) Eine Abbildung von Mengen $f\colon A \to B$ ist genau dann injektiv, wenn

☐ jede Faser von f aus genau einem Element besteht.

☒ jede Faser von f aus höchstens einem Element besteht.

☐ alle Fasern von f gleich mächtig sind.

(3) Welche der folgenden „Abbildungen" ist *nicht* wohldefiniert?

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$ ☒ $\begin{aligned} \mathbb{Q}\setminus\{1\} &\to \mathbb{Z} \\ \frac{p}{q} &\mapsto p \end{aligned}$ ☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \\ [x] &\mapsto [x-2] \end{aligned}$

(4) Ein *in*homogenes Gleichungssystem hat

☐ immer mindestens eine Lösung.

☒ unter Umständen gar keine Lösung.

☐ genau dann eine Lösung, wenn das zugehörige homogene Gleichungssystem eine Lösung besitzt.

(5) Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn

☒ sie vollen Zeilenrang besitzt.

☒ sie vollen Spaltenrang besitzt.

☐ Zeilen- und Spaltenrang übereinstimmen.

(6) Die Vereinigung zweier Basen eines Vektorraums ist

☐ wieder eine Basis.

☒ im Allgemeinen keine Basis, aber ein Erzeugendensystem.

☐ im Allgemeinen keine Basis, aber immer noch eine linear unabhängige Teilmenge.

(7) Eine Rotation um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn wird bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ durch folgende Matrix beschrieben:

☒ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} \pi/2 & 0 \\ 0 & \pi/2 \end{pmatrix}$

(8) Die komplexe Matrix $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}$ besitzt

☒ 2 als einzigen Eigenwert.

☐ keine reellen Eigenwerte.

☐ gar keine Eigenwerte.

Aufgabe 5

4

(a) Beh.: $\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ist linear unabhängig.

5P

Beweis: Seien $\lambda_{n_1}, \ldots, \lambda_{n_k} \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_{n_1} f_{n_1} + \ldots + \lambda_{n_k} f_{n_k} = 0 \quad (*)$$

OBdA sei $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Dann folgt aus $(*)$

$$\lambda_{n_1} \cdot \underbrace{f_{n_1}(n_1)}_{=1} + \lambda_{n_2} \cdot \underbrace{f_{n_2}(n_1)}_{=0} + \ldots + \lambda_{n_k} \cdot \underbrace{f_{n_k}(n_1)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{n_1} = 0.$$

Also gilt $\lambda_{n_2} f_{n_2} + \ldots + \lambda_{n_k} f_{n_k} = 0$.

Per Induktion über k folgt $\lambda_{n_1} = \lambda_{n_2} = \ldots = \lambda_{n_k} = 0$. $\square$

(b) Beh.: $\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ist kein Erzeugendensystem von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

5P

Beweis 1: Jede Funktion, die als Linearkombination der f_n geschrieben werden kann, ist auf dem Intervall $(0,1)$ konstant. Aber offenbar gibt es Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf $(0,1)$ nicht konstant sind. $\square$

Beweis 2: Wenn $f \in \langle \{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \rangle$, dann gilt $f(x) = 0 \;\; \forall x \ll 0$. Also ist z.B. die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$ nicht in $\langle \{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \rangle$. $\square$

Aufgabe 6

2,5P (a) Sei $\beta \in \mathrm{Skal}(\mathbb{R}^n)$ und $\beta \simeq \beta'$. Sei S eine Matrix wie in Aufgabenstellung.

Behauptung: $\beta' \in \mathrm{Skal}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Bilinearität folgt aus der Linearität von S und der Bilinearität von β.

Es ist noch zu zeigen, dass β' positiv definit ist:

Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\beta'(v,v) = \beta(Sv, Sv) \geq 0$, da β pos.-def.

Ferner gilt

$$\beta'(v,v) = 0 \Leftrightarrow \beta(Sv, Sv) = 0 \overset{\beta \text{ pos. def.}}{\Leftrightarrow} Sv = 0 \overset{S \text{ invertierbar}}{\Leftrightarrow} v = 0.$$

Also ist β' pos. def. und somit ein Skalarprodukt.

3,5P (b) $\simeq$ ist reflexiv: Sei $\beta \in \mathrm{Skal}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\beta(v,w) = \beta(E_n v, E_n w) \ \forall v,w \in \mathbb{R}^n. \Rightarrow \beta \simeq \beta.$$ (1)

$\simeq$ ist symmetrisch: Seien $\beta, \beta' \in \mathrm{Skal}(\mathbb{R}^n)$ mit $\beta \simeq \beta'$.

$\Rightarrow \exists S \in GL_n(\mathbb{R}) \ \forall v,w \in \mathbb{R}^n: \ \beta'(v,w) = \beta(Sv, Sw)$.

Aber dann gilt auch $\forall v,w \in \mathbb{R}^n$:

$$\beta(v,w) = \beta(SS^{-1}v, SS^{-1}w) = \beta'(S^{-1}v, S^{-1}(w)) \Rightarrow \beta' \simeq \beta.$$

(1)

$\simeq$ ist transitiv: Seien $\beta, \beta', \beta'' \in \mathrm{Skal}(\mathbb{R}^n)$ mit $\beta \simeq \beta'$, $\beta' \simeq \beta''$.

$\Rightarrow \exists S, T \in GL_n(\mathbb{R}) \ \forall v,w \in \mathbb{R}^n: \ \beta'(v,w) = \beta(Sv, Sw)$ und $\beta''(v,w) = \beta'(Tv, Tw)$

Also gilt $\forall v,w \in \mathbb{R}^n$:

$$\beta''(v,w) = \beta'(Tv, Tw) = \beta(STv, STw),$$

wobei ST invertierbar ist, da S und T invertierbar sind.

$\Rightarrow \beta \simeq \beta''$.

(1,5)

Aufgabe 6 (Fortsetzung)

(c) Beh.: Es gibt genau eine Äquivalenzklasse.

4P

Beweis: Sei $\beta \in \mathrm{Skal}(\mathbb{R}^n)$. Es genügt zu zeigen, dass β äquivalent zum Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Aus der Vorlesung wissen wir:

> Sei $\vartheta \in \mathrm{Skal}(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert eine Basis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, so dass
> $$\vartheta(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i=j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$
> (eine Orthonormalbasis bzgl. ϑ).

Sei also $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ eine ONB bzgl. β. Seien $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ die Standardnormalvektoren in $\mathbb{R}^n$ und sei γ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

Sei $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ die eindeutige Matrix mit

$$A v_i = e_i \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dann gilt

$$\beta(v_i, v_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ 1, & \text{falls } i=j \end{cases} = \gamma(e_i, e_j) = \gamma(Av_i, Av_j).$$

Also ist

$$\beta(v, w) = \gamma(Av, Aw) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Also ist $\gamma \simeq \beta$. $\square$